ハーモノグラフをつくろう ～数式が聴こえる～

数学 1 班

【キーワード】ピタゴラス音階，リサジュー図形，ハーモノグラフ，振り子運動

1. アブストラクト

音の関係を振動数や図で表すことにより数学的にとらえる．そのために，ハーモノグラフで振動数を変化させることで様々なリサジュー図形を描き，振動数と描かれる図形の関係を考える．

2. なぜ音は 12 音なのか.

2.1 音の性質

音は振動数の変化により音の高さが変化する. 2 倍音とは振動数が 2 倍の音であり, 1 オクターヴ高い音と呼ばれている. 2 倍音は振動数が異なるが，同じ音とみなせる．また， 3 倍音とは振動数を 3 倍にした音である． 3 倍音と基音はドとソのように相性の良い音であり，基音と異なる．
この 2 種類の音により，音階を作ることができる．

例えば，基音を 440Hz とすると，この音から始まる音階は 440Hz～880Hz の間の音の集合である. 440Hz の 3 倍音は 1320Hz であるが，880Hz を越えるため，オクターヴ違いである 660Hz を新しい音とする．次に 660Hz の 3 倍音を考えていけば，音階ができる．

2.2 なぜ音は 12 音なのか.

基音の振動数を f とすると, n 番目の音の振動数は$\frac{3^n}{2^m}f$ （但し, $1<\frac{3^n}{2^m}<2$)となる．しかし, n=13 のとき, m=19 であり，

$$\frac{3^{13}}{2^{19}} = 1.0136432647 \ldots \fallingdotseq 1$$

13 番目の音は基音とほぼ同じ音とみなせる．

現代ではピタゴラス学派がこのことを発見したと言われており，現代でも使われているこの音階をピタゴラス音階と呼んでいる．

3. リサジュー曲線とハーモノグラフ

3.1 リサジュー曲線とは

t を媒介係数とする$x = \sin(at), y = \cos(bt)$の媒介変数表示にあてはめることで描くことができる曲線のことをリサジュー曲線という．

図 3.1 a=2 b=3

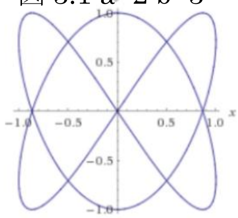
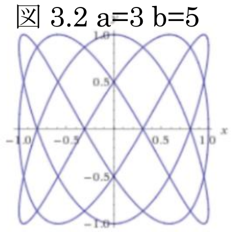


図 3.2 a=3 b=5



Wolfram Alpha より

3.2 リサジュー曲線をレーザー光で描く

音叉に鏡を取りつけレーザー光をあてる．音叉が振動することで，サイン波をつくることができる．そこで 2 つの音叉を直行させるよう配置し，光を 2 度反射させることでリサジュー図形が描くことができる．

同じ振動数の音叉では，楕円を描き(図 3.3)，振動数が異なる音叉では複雑な動き(図 3.4)がみられた．サイン波 1 つはとても単純だが組み合わせることで様々な種類の図が出ることに驚いた．音叉を頑丈に固定できなかったため，若干のずれが生じてしまったが，視覚化してみると，確かに振動数比が複雑な音の組み合わせほど図も複雑な形になってくることが確認できた．

図 3.3

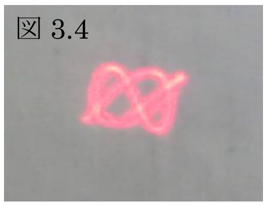


図 3.4

3.3 直交ハーモノグラフの仕組み

実験 3.2 では残せなかった図を紙に残すために，ハーモノグラフを使用する．音叉の振動の代わりに，振り子の振動を利用する．

振動数の対比により描かれるリサジュー曲線を変えるため，図 3.5 の振り子 A と振り子 B の振動数を振り子につける錘の位置によって変える．

図 3.5


図 3.6


図 3.7

3.4 ハーモノグラフでリサジュー曲線を描く

ハーモノグラフは, 2 つの振り子を同時に放すとき(閉相)と片方が中間地点に到達した際にもう一方を放すとき(開相)とでは，異なる図形を描く．例えば，振動数比が 1:1 のときの閉相は直線(図 3.8)になり，開相は円(図 3.9)になる．

図 3.8

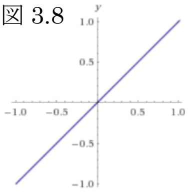
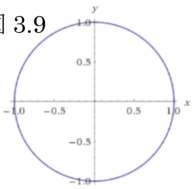


図 3.9



私たちが作ったハーモノグラフでは，振動数比が 1:1 のとき開相で実験すると，図 3.10(a)のように楕円になった．図 3.10(b)は閉相である．振動数比を変えることで複雑な図ができた． 8:9 はほかに描いた 1:2 や 4:5 などの図に比べても比較的複雑になった．振動数比が複雑になるほど図も複雑だと確認できる．これは人間が和音を聴くと無意識下にそれぞれの音の振動比を脳内で処理する，これらの比が複雑な程，処理に手間がかかり脳は不快感を持つ．という説に繋がっていると考えられる．また，作曲家達はこれらの和音を曲の中に組み込み，聴衆を魅了したのだろう．

図 3.10 直行ハーモノグラフで描いた図形 (振動数比 A:B)

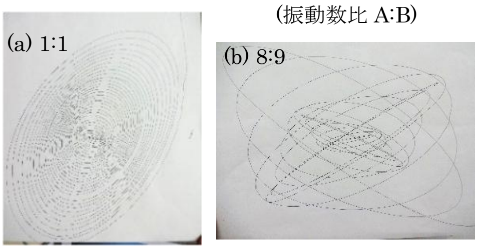
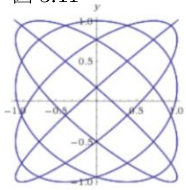


図 3.11



ハーモノグラフは，実験 3.2 と違い，図形ができる過程を観察することができる点が面白かった．また，描いた図形を残せることも利点である．しかし，今回作ったものは錘が軽く，また摩擦によりエネルギー減少が大きいため，振り子が著しく減衰してしまった．作製当初よりエネルギー減少は懸念しており，振り子を長くした(1.10m) が，上手くいかなかった．振り子をより長くし，錘を重くし，取り付けられる設計が必要であった．

4. まとめ

ハーモノグラフでリサジュー曲線を描く実験では，振動数比が複雑なほど複雑な図が描かれることが分かった．しかし，今回作ったハーモノグラフでは,エネルギー減少が大きいため，同じ初期条件でも再現性が乏しく，振動数比による比較研究ができなかった．

またリサジュー曲線は 2 つの振動により，描かれるが, 3 つの振動にも拡張してみたい．そのためには, 3 次元でのグラフを書く必要があり，入善高校に 3D プリンターを配置する必要がある．

音の関係や振動数を数値化，図式化する過程で計算，理論を記述する手段として数学が欠かせなかった．音と数学は深い関係にあるのだと思う．

5. 参考文献

[1]小方 厚 著

音律と音階の科学 ： ドレミ…はどのようにして生まれたか

[2]アンソニー・アシュトン著,

ハーモノグラフ～和音が織りなす美しい図形

[3]編集発行：千代延勝利

大人の科学マガジン with KIDS

[4] http://www.wolframalpha.com/ Wolfrom Alpha